CINEMATIQUE DU POINT

MCU - MCUA

*La résolution des exercices se fera de façon **rigoureuse**, **méthodique** et **précise** : pas de produit en croix, pas de « petits calculs intuitifs ». De la méthode, de la méthode, de la méthode…*

Exercice 1

Un moteur tourne à vitesse constante $N = 1500\ tr \cdot min^{-1}$. On donne $\theta(0) = 0$.

a) Type de mouvement : ☑ MCU ☐ MCUA car : **vitesse de rotation constante**

b) Donner les équations générales du mouvement.

D'après le cours, on a : (ou à retrouver par intégration et dérivation)

$$\text{MCU} \quad \begin{cases} \alpha(t) = 0 \\ \omega(t) = \omega_0 \\ \theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0 \end{cases}$$

c) Que signifie l'expression « $\theta(0) = 0$ » ?

A la date t = 0 s, l'angle du rotor par rapport au stator est nul : θ = 0.

d) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement (rechercher la(les) constante(s) d'intégration).

⇨ **Pour l'accélération :**

Pas de soucis, elle est nulle ; on a directement $\underline{\alpha(t) = 0}$

⇨ **Pour la vitesse :**

Pas de soucis, elle est constante et on la donne : $\omega_0 = \dfrac{\pi \cdot N}{30} = \dfrac{\pi \times 1500}{30} = 157{,}1\ rad \cdot s^{-1}$

Donc, $\underline{\omega(t) = 157{,}1}$

⇨ **Pour la position :**

Il faut trouver la constante θ_0 ; pour cela, on exploite la condition particulière qui est donnée :

Condition particulière en position $\theta(0) = 0$ mise dans l'équation de position $\theta(t) = \omega_0 \cdot t + \theta_0$:

$$0 = 157{,}1 \times 0 + \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\theta(t) = 157{,}1 \cdot t}$$

e) Calculer en s la durée $T_{(200)}$ pour parcourir l'angle $\theta = 200\ tr$.

On demande une durée pour un angle parcouru donné ; il faut prendre l'équation de position :

$$200 \times 2 \times \pi = 157{,}1 \cdot T_{(200)} \quad \Leftrightarrow \quad T_{(200)} = \frac{400 \cdot \pi}{157{,}1} = \underline{8\ s}$$

ATTENTION aux unités ; on travail en radians, pas en tours, ni en degrés…

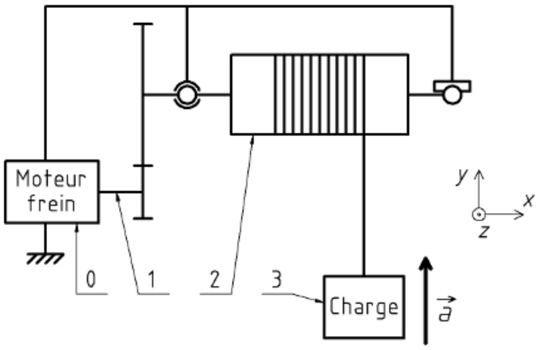
f) Calculer en tr l'angle $\theta(10)$.

On demande un angle parcouru pour une durée donnée ; il faut prendre l'équation de position :

$$\theta(10) = 157{,}1 \times 10 = 1571\ rad$$
$$\theta(10) = \frac{1571}{2\pi} = \underline{250\ tr}$$

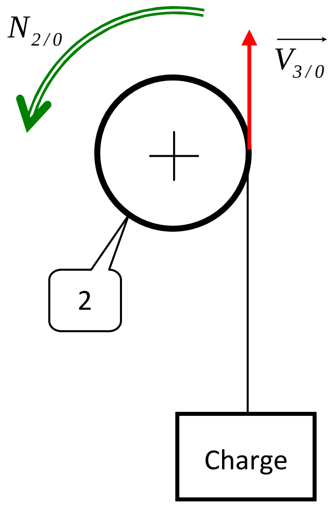
Exercice 2 (vitesse périphérique)

Une charge (3) est élevée à l'aide d'un câble qui s'enroule sur un cylindre (2). Le rayon du cylindre vaut $R = 0{,}2\ m$; le cylindre, mue par un motoréducteur, tourne à la vitesse constante $N_{2/0} = 0{,}5\ tr \cdot s^{-1}$. On note $\theta_{2/0}$ l'angle que forme le cylindre (2) par rapport au bâti (0) et on donne $\theta_{2/0}(0) = 0$. Le câble a une longueur totale $L = 5\ m$. On note $v_{3/0}$ la vitesse de déplacement de la charge (3) par rapport au bâti (0).



a) Calculer en $m \cdot s^{-1}$ la vitesse de déplacement $v_{3/0}$.

Une petite vue de côté pour expliquer la situation est une bonne chose à faire, même si cela n'est pas demandé :



Le bon point d'entrée est la relation $v_{3/0} = R \cdot \omega_{2/0}$

Avec $\omega_{2/0} = \pi \cdot N_{2/0} = \pi \times 0{,}5 = 1{,}57\ rad \cdot s^{-1}$

Attention, $N_{2/0}$ **est en** $tr \cdot s^{-1}$ **et pas** $tr \cdot min^{-1}$ **…**

$$v_{3/0} = R \cdot \omega_{2/0} = 0{,}2 \times 1{,}57 = \underline{0{,}314\ m \cdot s^{-1}}$$

b) Calculer en s la durée $T_{(200)}$ pour enrouler tout le câble.

Enrouler tout le câble de longueur connue, $L = 5\ m$ **implique un certain angle à parcourir par le tambour (2) : l'approche est donc purement géométrique :**

On peut se rappeler de la formule du périmètre d'un cercle : $p = 2\pi \cdot R$ **où** 2π **correspond à un tour complet.**

Adapté à notre situation, on a : $\Delta y = \Delta\theta_{2/0} \cdot R$

Δy **est la longueur du câble à enrouler («** y **» car le déplacement de la charge a lieu sur l'axe** $\vec{y}$ **)**

$\Delta\theta_{2/0}$ **est l'angle de rotation du tambour (2) par rapport au bâti (0), angle associé à la longueur** Δy **.**

Dans notre cas, $\Delta y = L = 5\ m$ **; le rayon est connu :** $R = 0{,}2\ m$ **donc tout va bien :**

$$L = \Delta\theta_{2/0} \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\theta_{2/0} = \frac{L}{R} = \frac{5}{0{,}2} = 25\ rad$$
$$\Delta\theta_{2/0} = 2\pi \times 25 = \underline{157{,}1\ tr}$$

c) Calculer en $tr \cdot min^{-1}$ la vitesse de rotation $N_{2/0}'$ que devrait avoir le tambour pour que le câble s'enroule complètement en une durée $T_{enroulement} = 20\ s$.

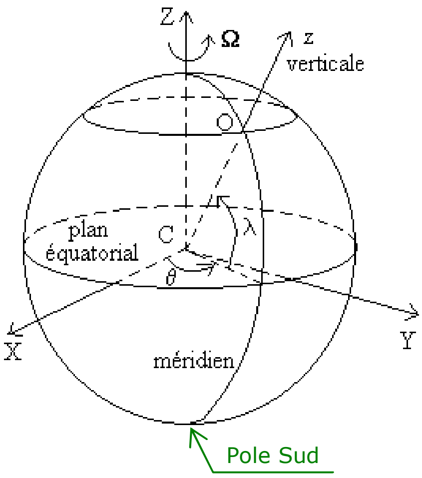
Le câble s'enroule complètement signifie que la longueur $L = 5\ m$ est à considérer et on a donc l'angle $\Delta\theta_{2/0} = 25\ rad$.

Le bon point d'entrée est la relation $\omega_{2/0}' = \dfrac{\Delta\theta_{2/0}}{\Delta t}$ (qui est une mise en œuvre de l'équation de position)

$$\omega_{2/0}' = \frac{\Delta\theta_{2/0}}{\Delta t} = \frac{25}{20} = 1{,}25\ rad \cdot s^{-1}$$

$$\omega_{2/0}' = \frac{2\pi \cdot N_{2/0}'}{60} \quad \Leftrightarrow \quad N_{2/0}' = \frac{60 \cdot \omega_{2/0}'}{2\pi} = \frac{60 \times 1{,}25}{2\pi} = \underline{11{,}94\ tr \cdot min^{-1}}$$

Exercice 3 (vitesse périphérique)



On considère notre planète, la Terre ; elle a un rayon moyen $R_T = 6400\ km$. Sa vitesse de rotation sur elle-même est connue de tous. On la place dans un repère fixe $R(C, X, Y, Z)$.
Soit O un point à sa surface. On pose $\theta = 90°$ et $\lambda = 30°$.
Attention, θ et λ sont des angles orientés.

a) D'après la figure, la Terre tourne autour de l'axe ☐ X ☐ Y ☑ Z

b) Pour $\theta = 90°$ et $\lambda = 30°$, le point O est dans le plan ☐ (XY) ☑ (YZ) ☐ (ZX)

c) Que vaut l'angle λ si le point O est au pole Nord ?

Dans ce cas, le point O est porté par l'axe $z = Z$
L'angle orienté λ vaut alors $\underline{\lambda = 90°}$

d) Que vaut l'angle λ si le point O est au pole Sud ?

Dans ce cas, le point O est porté par l'axe $z = -Z$
L'angle orienté λ vaut alors $\underline{\lambda = -90°}$ ou, c'est pareil, $\lambda = 3 \times 90 = \underline{270°}$

e) Que vaut l'angle λ si le point O est dans le plan équatorial ?

Dans ce cas, le point O est porté par l'axe $z = Y$
L'angle orienté λ vaut alors $\underline{\lambda = 0°}$

f) Calculer en $km \cdot h^{-1}$ la vitesse périphérique du point O situé dans le plan équatorial.

Dans le plan équatorial, le rayon à considérer est celui de la Terre directement :

$V = R_T \times \omega_{T/R}$ **avec**

$R_T = 6400\ km \equiv 6{,}4 \cdot 10^6\ m$

$\omega_{T/R} = 1\ tr \cdot jour^{-1}$

$$\omega_{T/R} = \frac{1}{24} tr \cdot h^{-1} \equiv \frac{1}{24 \times 60} tr \cdot min^{-1} \equiv \frac{1}{24 \times 60 \times 60} tr \cdot s^{-1} \equiv \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} rad \cdot s^{-1} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ rad \cdot s^{-1}$$

Soit,

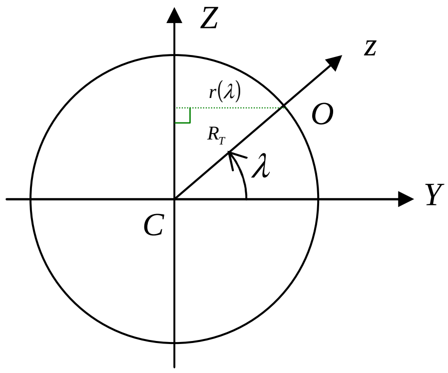
$V = R_T \times \omega_{T/R} = 6{,}4 \cdot 10^6 \times 7{,}27 \cdot 10^{-5} = 465{,}4\ m \cdot s^{-1}$

$V = 465{,}4 \times 3{,}6 = \underline{1675{,}5\ km \cdot h^{-1}}$

g) Calculer en $km \cdot h^{-1}$ la vitesse périphérique du point O pour $\lambda = 30°$, $\lambda = 45°$ et $\lambda = 60°$.

☞ *faire une figure de principe dans le plan (YZ) et exprimer la vitesse en fonction de l'angle λ.*

Une petite figure de principe, bien que non demandée, sera très utile ; il faut penser à faire ce genre de choses…



Elle nous permet ici d'établir ce qui suit :

$$\cos\lambda = \frac{r(\lambda)}{R_T} \quad \Leftrightarrow \quad r(\lambda) = R_T \cdot \cos\lambda$$

Puis vient :

$$\begin{aligned} V &= r(\lambda) \times \omega_{T/R} \\ &= R_T \cdot \cos\lambda \times \omega_{T/R} \\ &= 6{,}4 \cdot 10^{6} \times 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\lambda \\ \underbrace{V}_{m \cdot s^{-1}} &= 465{,}3 \cdot \cos\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 3{,}6 \times 465{,}3 \cdot \cos\lambda \\ \underbrace{V}_{km \cdot h^{-1}} &= 1642{,}7 \cdot \cos\lambda \end{aligned}$$

$\lambda = 30° \quad \rightarrow \quad V = 1642{,}7 \cdot \cos 30 = \underline{1422{,}6\ km \cdot h^{-1}}$

$\lambda = 45° \quad \rightarrow \quad V = 1642{,}7 \cdot \cos 45 = \underline{1161{,}5\ km \cdot h^{-1}}$

$\lambda = 60° \quad \rightarrow \quad V = 1642{,}7 \cdot \cos 60 = \underline{821{,}3\ km \cdot h^{-1}}$

On peut remarquer qu'en posant $\lambda = 0°$, on a :

$\lambda = 0° \quad \rightarrow \quad V = 1642{,}7 \cdot \cos 0 = 1642{,}7\ km \cdot h^{-1}$

On retombe (aux arrondis près) sur le résultat pour lequel le point O est dans le plan équatorial (voir f).

h) La vitesse périphérique dépend de l'angle θ ? ☑ vrai ☐ faux

Exercice 4

Un moteur passe de 0 à $1000\ tr \cdot min^{-1}$ en une durée $T_1 = 4\ s$. On suppose l'accélération constante.
On donne $\theta(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$.

a) Type de mouvement : ☐ MCU ☑ MCUA car : **accélération angulaire constante**

b) Donner les équations générales du mouvement.

D'après le cours, on a : (MCUA et MCUV désignant le même cas particulier)

$$\text{MCUV} \quad \begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 \\ \omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 \\ \theta(t) = \dfrac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0 \end{cases}$$

c) Que signifie les expressions « $\theta(0) = 0$ » et « $\omega(0) = 0$ » ?

$\theta(0) = 0$ **signifie qu'à la date t = 0, l'angle du rotor par rapport au stator est nul.**

$\omega(0) = 0$ **signifie qu'à la date t = 0, la vitesse de rotation du rotor par rapport au stator est nulle.**

d) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement.

⇨ Concernant l'accélération angulaire $\alpha(t)$:

On sait qu'elle est constante et qu'elle vaut α_0 ; reste à trouver α_0 …

Comme l'énoncé nous donne la variation de vitesse sur une durée donnée, on pose :

$\alpha_0 = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ **avec :**

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi \cdot N_2}{30} - \frac{\pi \cdot N_1}{30} = \frac{\pi \times 1000}{30} - \frac{\pi \times 0}{30} = 104{,}7\ rad \cdot s^{-1}$$

$$\Delta t = 4\ s$$

Soit,

$$\alpha_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{104{,}7}{4} = 26{,}18\ rad \cdot s^{-2}$$

$\underline{\alpha(t) = 26{,}18}$

⇨ Concernant la vitesse angulaire $\omega(t)$:

$\omega(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 26{,}18 \times 0 + \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = 0$

$\underline{\omega(t) = 26{,}18 \cdot t}$

⇨ Concernant la position angulaire $\theta(t)$:

$\theta(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 13{,}09 \times 0^2 + \theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_0 = 0$

$\underline{\theta(t) = 13{,}09 \cdot t^2}$

e) Calculer en $tr \cdot min^{-1}$ la vitesse angulaire $N(5)$.

$\omega(5) = 26,18 \times 5 = 130,9\ rad \cdot s^{-1}$

$$\omega = \frac{2 \cdot N}{60} \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{60 \cdot \omega}{2\pi}$$

$$N(5) = \frac{60 \cdot \omega(5)}{2\pi} = \frac{60 \times 130,9}{2\pi} = \underline{1250\ tr \cdot min^{-1}}$$

f) Calculer en deg la position angulaire $\theta(5)$.

$$\theta(5) = 13,09 \times 5^2 = 327,25\ rad$$

$$\theta(5) = \frac{327,25 \times 360}{2 \cdot \pi} = \underline{18750\ deg}$$

g) Calculer en s la durée T_1 nécessaire pour passer de $N = 0\ tr \cdot min^{-1}$ à $N = 500\ tr \cdot min^{-1}$.

$\alpha_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ **avec** $\Delta t = T_1$ **soit,** $T_1 = \frac{\Delta\omega}{\alpha_0} = \frac{1}{26,18} \cdot \left(\frac{2\pi \times 500}{60} - \frac{2\pi \times 0}{60} \right) = \underline{2\ s}$

h) Calculer en s la durée T_2 nécessaire pour passer de $N = 500\ tr \cdot min^{-1}$ à $N = 1000\ tr \cdot min^{-1}$.

$\alpha_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ **avec** $\Delta t = T_1$ **soit,** $T_2 = \frac{\Delta\omega}{\alpha_0} = \frac{1}{26,18} \cdot \left(\frac{2\pi \times 1000}{60} - \frac{2\pi \times 500}{60} \right) \underline{= 2\ s}$

A accélération constante, les différences de vitesses sont égales pour des durées égales.

Exercice 5 (long car trois phases à étudier)

Un moteur passe de 0 à $10000\,tr \cdot min^{-1}$ en une durée $T_{0-10000} = 1\,s$. Une fois la vitesse $N = 10^4\ tr \cdot min^{-1}$ atteinte, elle est maintenue constante pendant une durée $T_{II} = 4\ s$ puis revient à vitesse nulle en $T_{III} = 2\ s$. On suppose que les accélérations sont constantes. On donne $\theta(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$.

a) Compléter le tableau synthétique dans la limite des renseignements fournis par l'énoncé.

Phase	Phase I (accélération)	Phase II (vitesse constante)	Phase III (ralentissement)
Date de début (s)			
Date de fin (s)			
Durée (s)			
Accélération $(m \cdot s^{-2})$			
Vitesse initiale $(m \cdot s^{-1})$			
Vitesse finale $(m \cdot s^{-1})$			
Variation de vitesse $(m \cdot s^{-1})$			
Position initiale (m)			
Position finale (m)			
Variation de position (m) *(distance parcourue)*			

b) Donner les équations générales du mouvement de la phase I : $\alpha_I(t)$, $\omega_I(t)$ et $\theta_I(t)$.

c) Donner les équations générales du mouvement de la phase I : $\alpha_{II}(t)$, $\omega_{II}(t)$ et $\theta_{II}(t)$.

d) Donner les équations générales du mouvement de la phase I : $\alpha_{III}(t)$, $\omega_{III}(t)$ et $\theta_{III}(t)$.

e) Réaliser les graphes des positions, vitesses et accélération en renseignant numériquement ce qui est connu et littéralement ce qui ne l'est pas.

f) Déterminer les **équations spécifiques** du mouvement des phases I, II et III.

g) Poser les calculs nécessaires pour compléter le tableau de synthèse.